

Programme de colle n°4

semaine du 5 au 9 octobre

Notions vues en cours

Chapitre 5 – Nombres complexes (suite)

- Racine carrée d'un complexe ω : définition, si $\omega \neq 0$ alors il y a deux racines carrées opposées, si $\omega = 0$ il n'y en a qu'une, méthode pour les déterminer (avec ω sous forme algébrique ou trigonométrique)
- Racine(s) et factorisation d'un trinôme du second degré $az^2 + bz + c$ avec a, b, c complexes
- Relations coefficients-racines pour un trinôme du second degré, résolution de systèmes de la forme
$$\begin{cases} u + v = \dots \\ uv = \dots \end{cases}$$
- Racines n -ièmes de l'unité, ensemble $\mathbb{U}_n$, racine(s) n -ième d'un complexe ω (il y en a n si $\omega \neq 0$, une si $\omega = 0$)
- Exponentielle complexe : définition, propriétés algébriques
- Caractérisation qu'un complexe non nul soit réel, imaginaire pur, etc. en fonction d'un de ses arguments
- Géométrie : si A, B, C sont trois points distincts, l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est égal à $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$, caractérisation de l'alignement de A, B, C ou de l'orthogonalité de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de cet argument.

Chapitre 6 – Rappels et compléments sur les fonctions réelles

Sera vu plus tard dans l'année : les fonctions indicatrices $\mathbb{1}_A$, la notion de fonction injective, surjective, bijective, les notions de fonctions réciproques

- Fonction réelle de la variable réelle : définition, notations, ensemble de départ et d'arrivée, ensemble de définition noté D_f , l'ensemble des fonctions de D dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^D$
- Composée de deux fonctions, définition et détermination de $D_{g \circ f}$
- Relations $=$ et $\leq$ sur $\mathbb{R}^D$, fonction positive, négative (et les variantes avec "strictement"), notations $f \equiv 0$ et $f \not\equiv 0$
- Fonction paire, impaire, T -périodique : définitions, réduction du domaine d'étude pour tracer un graphe
- Opérations sur $\mathbb{R}^D$: somme, différence, produit, quotient, puissance entière non nulle, $|f|$, λf avec $\lambda \in \mathbb{R}$
- Fonction croissante, décroissante, monotone (et les variantes avec "strictement"), fonction constante ; monotonie de $f + g$, λf , de $g \circ f$ en fonction des monotonies de f et de g ainsi que du signe de λ . Si f et g sont positives et croissantes, alors fg l'est aussi.
- Fonction majorée, minorée, bornée ; f est bornée ssi $|f|$ est majorée
- Maximum (global), minimum (global) d'une fonction, notations $\max_{x \in D} f(x)$ ou $\max_D f$
- Restriction d'une fonction, notation $f|_A$

Les questions de cours sont en page suivante

Questions Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examineur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles de la page suivante (chapitres 3 à 5).

Les questions flash sont en page suivante

Questions de Cours.

Exporter
(LaTeX)

Q1 Calcul des racines carrées ou des racines n -ièmes de deux complexes donnés par l'examineur.
Par exemple :

- Calculer les racines carrées de $8 - 6i$.
Chapitre 5, Exercice 5.35
- Calculer les racines cubiques de $2i$.
Chapitre 5, Exercice 5.45

Exporter
(LaTeX)

Q2

- Soit $z \in \mathbb{C}$. Donner la définition de l'exponentielle de e^z . Quelle est la forme exponentielle de e^z ?
Chapitre 5, Définition 5.46 (et la remarque en-dessous)
- Soit $z, u, v \in \mathbb{C}$. Compléter les formules suivantes :

$$\overline{e^z} = \dots \quad e^{-z} = \dots \quad e^{u+v} = \dots \quad e^{u-v} = \dots$$

Chapitre 5, Théorème 5.47

- Résoudre $e^z = \sqrt{3} + i$ dans $\mathbb{C}$
Chapitre 5, Exercice 5.48

Exporter
(LaTeX)

Q3

- Définition de " f est majorée par M ", puis de " f est majorée".
Chapitre 6, Définition 6.14
- À l'oral : définitions de " f est minorée par M ", de " f est minorée" et enfin de " f est bornée"
- Sans démonstration : caractérisation de " f est bornée".
Chapitre 6, Théorème 6.15
- Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{3 + \cos x} - \frac{1}{x+1}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
Chapitre 6, Exercice 6.16

Exporter
(LaTeX)

Q4

- Définition de " f admet un maximum en a ".
Chapitre 6, Définition 6.17
- À l'oral : définitions de " f admet un minimum en a " et " f admet un extremum en a ".
- Déterminer $\max_{x \in [1, +\infty[} \frac{\ln x}{x}$.
Chapitre 6, Exercice 6.18

Chapitre 5 – Nombres complexes

- Soit z et z' deux complexes et λ un réel. Parmi les formules suivantes, compléter celles qui sont vraies (et seulement celles-là) :

$$\operatorname{Re}(z + z') = \dots \quad \operatorname{Im}(zz') = \dots \quad \operatorname{Re}(\lambda z) = \dots \quad \operatorname{Im}(\bar{z}) = \dots$$

- Compléter les formules suivantes : $z + \bar{z} = \dots$ et $z - \bar{z} = \dots$
- Compléter l'identité remarquable suivante : $|u + v|^2 = \dots$
- À quelle condition sur u et v a-t-on $|u + v| = |u| + |v|$?
- Donner les deux formules d'Euler.
- À quelle condition est-ce qu'un complexe z admet une forme trigonométrique ? Donner cette forme en précisant dans quels ensembles appartiennent chaque nouvelle variable.
- Mettre sous forme trigonométrique un complexe de la forme a et/ou de la forme ib avec a et b deux réels choisis par l'examineur.
- Si $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$ (avec $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$), que peut-on en déduire sur r, r', θ, θ' ?
- Combien de racines carrées possède un nombre complexe ω ? Si z est une de ces racines, que peut-on dire ?
- On considère le polynôme $az^2 + bz + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$. Que vaut la somme de ses racines ? et le produit ?
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelles sont les racines n -ièmes de l'unité ?
- Soit $z \in \mathbb{C}$. Écrire e^z sous forme trigonométrique.
- Soit $z \in \mathbb{C}^*$. À quelle condition sur $\arg(z)$ a-t-on $z \in \mathbb{R}_+^*$? et $z \in \mathbb{R}^*$?

Chapitre 4 – Trigonométrie

- Pour cosinus, sinus ou tangente : une ou deux formules à compléter parmi les formules de changement de quadran, d'addition, de duplication, au choix de l'examineur.
- Compléter : $\cos a = \cos b \iff \dots$
- Compléter : $\sin a = \sin b \iff \dots$
- Compléter : $\tan a = \tan b \iff \dots$
- Quel est l'ensemble de définition de la fonction tangente ?

Chapitre 3 – Somme et produits

- Compléter les formules $\sum_{k=1}^n k = \dots$ et $\sum_{k=1}^n k^2 = \dots$
- Compléter la formule $a^n - b^n = \dots$
- Factoriser $a^n - b^n$ pour une petite valeur de n , fixée par l'examineur.
- Compléter la formule $\sum_{k=0}^n x^k = \dots$
- Recopier et compléter les formules correctes, et seulement celles-là :

$$\sum (a_i + b_i) = \dots \quad \sum a_i b_i = \dots \quad \sum \lambda a_i = \dots \quad \sum a_i^\lambda = \dots$$

$$\prod (a_i + b_i) = \dots \quad \prod a_i b_i = \dots \quad \prod \lambda a_i = \dots \quad \prod a_i^\lambda = \dots$$

(on s'autorise ici à ne rien mettre au-dessus et en-dessous des symboles $\sum$ et $\prod$)

- Réaliser un changement d'indice donné dans une somme donnée par l'examineur. Par exemple :

$$\sum_{k=1}^{n+2} \frac{k}{n+k} = \sum_{j=\dots}^{\dots} \dots \quad \text{avec } j = k + n$$

- Donner la définition de $\binom{n}{k}$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.
- Énoncer la propriété du triangle de Pascal.
- Compléter la formule $(a+b)^n = \dots$
- Développer $(a+b)^n$ pour une petite valeur de n , fixée par l'examineur.
- Compléter : $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=\dots}^{\dots} \sum_{j=\dots}^{\dots} a_{ij} = \sum_{j=\dots}^{\dots} \sum_{i=\dots}^{\dots} a_{ij}$
- Compléter : $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=\dots}^{\dots} \sum_{j=\dots}^{\dots} a_{ij} = \sum_{j=\dots}^{\dots} \sum_{i=\dots}^{\dots} a_{ij}$

Annexe : code LaTeX des exercices à copier-coller

[Retour en
arrière](#)

Contenu reproduit (merci de me le signaler s'il y a un bug !)

Calcul des racines carrées ou des racines n -ièmes de deux complexes donnés par l'examineur. Par exemple :

```
\begin{itemize}
\item Calculer les racines carrées de  $8-6i$ .
\item Calculer les racines cubiques de  $2i$ .
\end{itemize}
```

[Retour en
arrière](#)

Contenu reproduit (merci de me le signaler s'il y a un bug !)

```
\begin{itemize}
\item Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Donner la définition de l'exponentielle de  $e^z$ . Quelle est la forme exponentielle de  $e^z$  ?
\item Soit  $z, u, v \in \mathbb{C}$ . Compléter les formules suivantes :  $\overline{e^z} = \dots \quad e^{-z} = \dots \quad e^{u+v} = \dots \quad e^{u-v} = \dots$ 
\item Résoudre  $e^z = \sqrt{3} + i$  dans  $\mathbb{C}$ 
\end{itemize}
```

[Retour en
arrière](#)

Contenu reproduit (merci de me le signaler s'il y a un bug !)

```
\begin{itemize}
\item Définition de `` $f$  est majorée par  $M$ '', puis de `` $f$  est majorée''.
\item À l'oral : définitions de `` $f$  est minorée par  $M$ '', de `` $f$  est minorée'' et enfin de `` $f$  est bornée''.
\item Sans démonstration : caractérisation de `` $f$  est bornée''.
\item Montrer que la fonction  $f: x \mapsto \frac{\sin x}{3 + \cos x} - \frac{1}{x+1}$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+$ .
\end{itemize}
```

[Retour en
arrière](#)

Contenu reproduit (merci de me le signaler s'il y a un bug !)

```
\begin{itemize}
\item Définition de `` $f$  admet un maximum en  $a$ ''.
\item À l'oral : définitions de `` $f$  admet un minimum en  $a$ '' et `` $f$  admet un extremum en  $a$ ''.
\item Déterminer  $\max_{x \in [1, +\infty[} \frac{\ln x}{x}$ .
\end{itemize}
```